

# Μάθημα: Εισαγωγή στην Πληροφορική και την Ανοικτότητα

## Κεφάλαιο 1.2 – Αριθμητικά συστήματα

### Περιεχόμενα

#### 1.2.1 Εισαγωγή

#### 1.2.2 Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης

#### 1.2.3 Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης

#### 1.2.4 Το οκταδικό σύστημα αρίθμησης

#### 1.2.5 Το δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης

#### 1.2.6 Μετατροπή βάσης αριθμού

Μετατροπή από το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης στο δυαδικό

Μετατροπή από το δεκαδικό σύστημα στο οκταδικό

Μετατροπή από το δεκαδικό σύστημα στο δεκαεξαδικό

Μετατροπή από άλλα συστήματα αρίθμησης στο δεκαδικό

Μετατροπή από το δυαδικό σύστημα στο δεκαεξαδικό/οκταδικό και αντίστροφα

Δραστηριότητες - Ασκήσεις



### Στόχοι

Μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου οι σπουδαστές/τριες θα μπορούν να:

- ✓ κατανοούν την έννοια των αριθμητικών συστημάτων
- ✓ περιγράφουν το δεκαδικό, δυαδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης
- ✓ μετατρέπουν αριθμούς από το δεκαδικό σύστημα στο δυαδικό, οκταδικό και δεκαεξαδικό σύστημα και αντίστροφα
- ✓ μετατρέπουν αριθμούς από το δυαδικό σύστημα στο οκταδικό και δεκαεξαδικό σύστημα

### 1.2.1 Εισαγωγή

Ένα αριθμητικό σύστημα είναι ένα σύνολο από κανόνες που ορίζει πως μπορεί ν' αναπαρασταθεί μια ποσότητα ή ένα πλήθος αντικειμένων χρησιμοποιώντας διακριτά σύμβολα. Όπως χρησιμοποιούμε σύμβολα, τους χαρακτήρες, για να ορίσουμε λέξεις σε μια γλώσσα έτσι χρησιμοποιούμε σύμβολα, τα ψηφία, για να ορίσουμε τους αριθμούς. Οι χαρακτήρες ενός αλφαβήτου είναι περιορισμένοι και χρειάζεται να τους επαναλαμβάνουμε με διαφορετικούς συνδυασμούς για να δημιουργούμε λέξεις. Το ίδιο ισχύει για τους αριθμούς.

Τα συστήματα αρίθμησης διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: θεσιακά και μη θεσιακά.

Στα μη θεσιακά συστήματα κάθε ψηφίο έχει μια συγκεκριμένη τιμή ανεξάρτητα από τη θέση που βρίσκεται μέσα στον αριθμό.

Ένα τέτοιο σύστημα είναι το Ρωμαϊκό, που χρησιμοποιήθηκε στην Αρχαία Ρώμη, αλλά επιβιώνει και σήμερα σε συγκεκριμένες περιστάσεις όπως στον κινηματογράφο για την απεικόνιση του έτους παραγωγής της ταινίας και στο καντράν αναλογικών ρολογιών για να προσδώσει μια αίσθηση ρετρό.<sup>1</sup>

Στα θεσιακά συστήματα αρίθμησης η τιμή κάθε ψηφίου υπολογίζεται με βάση τη θέση που έχει στον αριθμό.

Το όνομα ενός θεσιακού συστήματος αρίθμησης προέρχεται από το σύνολο των ψηφίων που χρησιμοποιεί για την παράσταση των αριθμών.

Βάση ονομάζεται το μέγιστο πλήθος των μοναδικών ψηφίων (συμπεριλαμβανομένου και του 0) που ένα σύστημα αρίθμησης χρησιμοποιεί. Η βάση του συστήματος δεν ανήκει στα ψηφία του συστήματος, αλλά υπερβαίνει κατά μία μονάδα το μεγαλύτερο ψηφίο του.

### 1.2.2 Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (βάση=10)

Το πρώτο θεσιακό σύστημα αρίθμησης που θα συζητήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι το δεκαδικό.

Αυτό περιλαμβάνει τα ψηφία από 0 έως 9 και έχει σαν βάση του (base, radix) τον αριθμό 10. Το ίδιο ισχύει, όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω, για όλα τα αριθμητικά συστήματα ανεξάρτητα από τη βάση που αυτά έχουν οριστεί. Μερικά συστήματα που θα δούμε είναι:

- Το δυαδικό σύστημα έχει βάση το 2 και για την αναπαράσταση των αριθμών χρησιμοποιούνται τα δύο ψηφία 0 και 1.
- Το οκταδικό σύστημα έχει βάση το 8 και για την αναπαράσταση των αριθμών χρησιμοποιούνται τα οκτώ ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7.
- Το δεκαεξαδικό σύστημα έχει βάση το 16 και για την αναπαράσταση των αριθμών χρησιμοποιούνται τα δεκαέξι ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E και F. Εδώ παρατηρούμε ότι αν η βάση του συστήματος είναι μεγαλύτερη από το δέκα τότε χρησιμοποιούνται τα γράμματα A,B,C,D,E,F για την αναπαράσταση των ψηφίων 10,11,12,13,14 και 15 του αριθμητικού συστήματος.

Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης δεν είναι το μοναδικό, όμως είναι αυτό που χρησιμοποιείται περισσότερο από τους ανθρώπους στις μέρες μας. Ο ανθρώπινος εγκέφαλος μπορεί πιο εύκολα να κάνει υπολογισμούς στο δεκαδικό, δηλαδή με την χρήση δέκα αριθμητικών ψηφίων (0,1,2,3,4,5,6,7,8 και 9). Η επιλογή του συγκεκριμένου συστήματος έγινε εξαιτίας της αρχικής ευκολίας χρήσης των δακτύλων για απαρίθμηση.

Η θέση των ψηφίων μέσα στον αριθμό τους δίνει και την συνολική αριθμητική τους αξία, γιατί κάθε ψηφίο πολλαπλασιάζεται με την βάση υψωμένη σε κάποια δύναμη.

<sup>1</sup> Πηγή Βικιπαίδεια [https://el.wikipedia.org/wiki/Δεκαδικό\\_σύστημα](https://el.wikipedia.org/wiki/Δεκαδικό_σύστημα)

Το ψηφίο το οποίο βρίσκεται στη δεξιότερη θέση του αριθμού μεταφέρει το μικρότερο βάρος και ονομάζεται λιγότερο σημαντικό ψηφίο ή λιγότερο σημαντικό bit (LSB). Αντίθετα, το ψηφίο το οποίο σημαντικότερο ψηφίο ή περισσότερο σημαντικό bit (MSB).

Η τάξη των ψηφίων στους ακέραιους αριθμούς του δεκαδικού συστήματος είναι (από τα δεξιά προς τα αριστερά) μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες κλπ. Αυτό σημαίνει ότι κάθε φορά που μετράμε δέκα μονάδες μίας τάξης τις ομαδοποιούμε σε μία μονάδα της επόμενης τάξης. Για παράδειγμα, δέκα μονάδες ομαδοποιούνται σε μία δεκάδα, δέκα δεκάδες σε μία εκατοντάδα, δέκα εκατοντάδες σε μία βρίσκεται στην αριστερότερη θέση του αριθμού μεταφέρει το μεγαλύτερο βάρος και ονομάζεται χιλιάδα κ.ο.κ.

Παράδειγμα: ο αριθμός 252 σημαίνει  $200+50+2$

Κάθε ψηφίο, ανάλογα με τη θέση του εκφράζει πόσα πολλαπλάσια δεκάδων έχουμε. Για τον 252 έχουμε:

- 2 μονάδες (=καμία δεκάδα)
- 5 δεκάδες (=1 δεκάδα = 10 μονάδες)
- 2 εκατοντάδες (=1 εκατοντάδα =10 δεκάδες)

Παρατηρήστε ότι το ψηφίο 2 στη θέση των μονάδων έχει την τιμή 2, ενώ το ίδιο ψηφίο στη θέση των εκατοντάδων έχει την τιμή 200.

Έτσι η αναπαράσταση του παραπάνω αριθμού μπορεί να εκφραστεί σε δυνάμεις του 10 ως:

$$2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

Εκτός από τους ακέραιους αριθμούς, χρησιμοποιούμε και πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αριθμούς με ακέραιο και κλασματικό μέρος (δεκαδικό μέρος).

Στο δεκαδικό σύστημα είμαστε εξοικειωμένοι με τους πραγματικούς αριθμούς και τους χρησιμοποιούμε συχνά στην καθημερινή μας ζωή. Για παράδειγμα, μ' αυτούς αναπαριστούμε τα ευρώ και τα λεπτά του ευρώ π.χ. 25,62€.

Η παράσταση του παραδείγματος στο δεκαδικό σύστημα είναι ως εξής:

$$2 \times 10^1 + 5 \times 10^0, \quad 6 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$$

Ακέραιο μέρος      Κλασματικό μέρος

Στο ακέραιο μέρος κάθε ψηφίο πολλαπλασιάζεται με τη βάση υψωμένη σε θετική δύναμη ξεκινώντας από το δεξιότερο ψηφίο με τη βάση υψωμένη στην μηδενική, ενώ στο κλασματικό μέρος κάθε ψηφίο πολλαπλασιάζεται με τη βάση υψωμένη σε αρνητική δύναμη(ξεκινώντας από το -1) ξεκινώντας από το αριστερότερο ψηφίο.

### 1.2.3 Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης (βάση=2)

Το δεύτερο θεσιακό αριθμητικό σύστημα που θα δούμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι το δυαδικό σύστημα.

Σε αυτό το σύστημα η βάση είναι το 2 και χρησιμοποιούμε μόνο δύο ψηφία, το 0 και το 1. Τα ψηφία σε αυτό το σύστημα ονομάζονται δυαδικά ψηφία ή bit. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιείται στους υπολογιστές όπου όπως θα δούμε παρακάτω, τα δεδομένα και τα προγράμματα αποθηκεύονται σε αυτούς χρησιμοποιώντας μια σειρά από δυαδικά ψηφία (bit). Ο λόγος που επιλέχθηκε αυτό το σύστημα αρίθμησης είναι γιατί είναι απλούστερο από το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και επειδή ο υπολογιστής είναι κατασκευασμένος από ηλεκτρονικούς διακόπτες που μπορούν να έχουν μόνο δύο διακριτές (μοναδικές) καταστάσεις, αν περνά ή όχι ρεύμα. Ένας άλλος λόγος που υιοθετήθηκε το δυαδικό σύστημα, είναι η ύπαρξη μιας περιοχής της μαθηματικής λογικής, που είναι γνωστή ως άλγεβρα Bool που διαπραγματεύεται ειδικά τους δυαδικούς αριθμούς και βοηθά στην απλοποίηση της διαδικασίας σχεδίασης ενός υπολογιστή.

Το στοιχειώδες κομμάτι πληροφορίας στον υπολογιστή που εκφράζει αυτές τις δύο διακριτές καταστάσεις το ονομάζουμε δυαδικό ψηφίο (Binary digit – bit) πληροφορίας. Το bit 1 αντιπροσωπεύει τη μία από αυτές τις δύο καταστάσεις και το bit 0 την άλλη.

Με τη χρήση αυτών των δυο ψηφίων είναι αδύνατο να μπορέσουμε να αναπαραστήσουμε όλα τα γράμματα, τους αριθμούς και γενικά όλα τα σύμβολα που είναι απαραίτητα για την επικοινωνία του ανθρώπου με τον υπολογιστή αλλά και των υπολογιστών μεταξύ τους. Σε ομάδες όμως περισσότερων δυαδικών ψηφίων μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα πλήθος από χαρακτήρες. Για να βρούμε πόσα δυαδικά ψηφία χρειαζόμαστε για την αναπαράσταση όλων των συμβόλων σκεφτόμαστε ως εξής:

Ένα δυαδικό ψηφίο μπορεί να αναπαραστήσει 2 σύμβολα. Δύο δυαδικά ψηφία μπορούν να αναπαραστήσουν  $2^2$  σύμβολα. 3 δυαδικά ψηφία μπορούν να αναπαραστήσουν  $2^3$  σύμβολα. ... n δυαδικά ψηφία μπορούν να αναπαραστήσουν  $2^n$  σύμβολα.

Η τάξη των ψηφίων στους δυαδικούς ακεραίους είναι από τα δεξιά προς τα αριστερά.

Μια ομάδα αποτελούμενη από οκτώ bits ονομάζεται byte. Αφού κάθε bit μπορεί να πάρει 2 διαφορετικές τιμές (0 ή 1), κάθε byte που αποτελείται από 8 bits μπορεί πάρει  $2^8=256$  διαφορετικούς συνδυασμούς δυαδικών ψηφίων.

Το byte είναι η βασική μονάδα μέτρησης της χωρητικότητας που διαχειρίζεται ένας υπολογιστής. Το byte αντιπροσωπεύει ένα χαρακτήρα, που μπορεί να είναι ένα γράμμα, ένας αριθμός ή κάποιο άλλο σύμβολο.

Τα πολλαπλάσια του byte είναι:

Kilobyte (Κιλομπάιτ), 1 kB = 1.024 bytes =  $2^{10}$  bytes

Megabyte (Μεγαμπάιτ), 1 MB = 1.048.576 bytes = 1024 kilobytes =  $2^{20}$  bytes

Gigabyte (Γιγαμπάιτ), 1 GB = 1.073.741.824 bytes =  $2^{30}$  bytes

Terabyte (Τεραμπάιτ), 1 TB = 1.099.511.627.776 bytes =  $2^{40}$  bytes

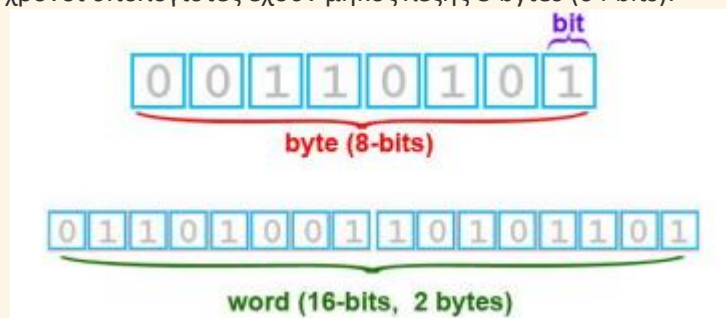
Petabyte (Πεταμπάιτ), 1 PB = 1.125.899.906.842.624 bytes =  $2^{50}$  bytes

Exabyte (Εξαμπάιτ), 1 EB = 1.152.921.504.606.846.976 bytes =  $2^{60}$  bytes

Zettabyte (Ζεταμπάιτ), 1 ZB = 1.180.591.620.717.411.303.424 bytes =  $2^{70}$  bytes

Yottabyte (Γιωταμπάιτ), 1 YB = 1.208.925.819.614.629.174.706.176 bytes =  $2^{80}$  bytes

Μία λέξη (word) είναι μια μεγαλύτερη ομάδα από n bits (το n είναι συνήθως πολλαπλάσιο του 8) και δηλώνει το μήκος των δυαδικών ψηφίων που μπορεί να διαχειριστεί η μνήμη του υπολογιστή. Το μήκος της λέξης δεν είναι ίδιο για όλους τους υπολογιστές, αλλά εξαρτάται από τον τύπο της κεντρικής μονάδας επεξεργασίας του υπολογιστή. Οι σύγχρονοι υπολογιστές έχουν μήκος λέξης 8 bytes (64 bits).



Παράδειγμα αριθμού στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης: 10111

Προσοχή! Δεν είναι ο δεκαδικός αριθμός «δέκα χιλιάδες εκατόν έντεκα». Εκφράζει μία ποσότητα χρησιμοποιώντας το αλφάβητο του δυαδικού συστήματος!

Για την αποφυγή παρερμηνειών, θα πρέπει να δηλώνουμε τη βάση του συστήματος αρίθμησης στο οποίο εκφράζεται ο αριθμός με ένα δείκτη μετά τον αριθμό, ο οποίος γράφεται μέσα σε παρενθέσεις. Όταν δεν αναγράφεται η βάση, εννοείται το 10.

Έτσι ο παραπάνω αριθμός γράφεται  $(10111)_2$

Παράδειγμα μη έγκυρου αριθμού στο δυαδικό σύστημα:  $(14011)_2$ . Είναι μη έγκυρος γιατί στο δυαδικό σύστημα το ψηφίο 4 δεν υπάρχει στο αλφάβητο του δυαδικού συστήματος αρίθμησης.

Για την ακολουθία ψηφίων 10111 έχουμε:

- 1 μονάδα (=καμία δυάδα)
- 1 δυάδα (1 δυάδα = 2 μονάδες)
- 1 τετράδα (=1 τετράδα = 2 δυάδες)
- 0 οκτάδα (=1 οκτάδα = 2 τετράδες)
- 1 δεκαεξάδα (=1 δεκαεξάδα = 2 οκτάδες)

Έτσι η αναπαράσταση του παραπάνω αριθμού μπορεί να εκφραστεί σε δυνάμεις του 2 ως:

$$1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

### 1.2.4 Το οκταδικό σύστημα αρίθμησης (βάση=8)

Το δυαδικό σύστημα χρησιμοποιείται για την αποθήκευση δεδομένων στο εσωτερικό του υπολογιστή. Το οκταδικό σύστημα αρίθμησης και το δεκαεξαδικό που θα δούμε παρακάτω, επινοήθηκαν για την αναπαράσταση με συντομία μεγάλων δυαδικών αριθμών εκτός του υπολογιστή. Και αυτό γιατί έχουν βάσεις που είναι δυνάμεις του δύο. Επειδή  $2^3 = 8$ , ένα οκταδικό ψηφίο μπορεί να αντικαταστήσει μια τριάδα από δυαδικά ψηφία. Αντίστοιχα, επειδή  $2^4 = 16$ , ένα δεκαεξαδικό ψηφίο μπορεί να αντικαταστήσει μια τετράδα από δυαδικά ψηφία. Αυτό διευκολύνει τη μετατροπή της παράστασης ενός αριθμού από το ένα σύστημα στο άλλο.

Η βάση στο οκταδικό σύστημα είναι το 8 και χρησιμοποιούμε 8 ψηφία για την αναπαράσταση αριθμών τα  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

Η τάξη των ψηφίων στους οκταδικούς ακεραίους είναι (από τα δεξιά προς τα αριστερά) μονάδες, οκτάδες (=8 μονάδες), εξηντατετράδες (=8 οκτάδες), πεντακόσια δωδεκάδες (=8 εξηντατετράδες) κλπ. Επειδή η βάση είναι το 8, σε κάθε θέση η ομαδοποίηση γίνεται σε οκτάδες.

Παράδειγμα αριθμού στο οκταδικό σύστημα αρίθμησης:  $(372)_8$

- 2 μονάδες (=καμία οκτάδα)
- 7 οκτάδες (1 οκτάδα = 8 μονάδες)
- 3 εξηντατετράδες (=1 εξηντατετράδα = 8 οκτάδες)

Έτσι η αναπαράσταση του παραπάνω αριθμού μπορεί να εκφραστεί σε δυνάμεις του 8 ως:

$$3 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 2 \times 8^0$$

### 1.2.5 Το δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης (βάση=16)

Η βάση στο δεκαεξαδικό σύστημα είναι το 16 και χρησιμοποιούμε 16 ψηφία για την αναπαράσταση αριθμών τα  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$ . Τα σύμβολα A, B, C, D, E, F είναι ισοδύναμα με 10, 11, 12, 13, 14 και 15 αντίστοιχα.

Η τάξη των ψηφίων στους δεκαεξαδικούς ακεραίους είναι (από τα δεξιά προς τα αριστερά) μονάδες, δεκαεξάδες (=16 μονάδες), διακοσιοπεντηνταεξάδες (=8 δεκαεξάδες) κλπ. Επειδή η βάση είναι το 16, σε κάθε θέση η ομαδοποίηση γίνεται σε δεκαεξάδες.

Παράδειγμα αριθμού στο δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης:  $(C03)_{16}$

- 3 μονάδες (=καμία δεκαεξάδα)
- 0 δεκαεξάδες (1 δεκαεξάδα = 16 μονάδες)
- 12 διακοσιοπεντηνταεξάδες (=16 δεκαεξάδες)

Έτσι η αναπαράσταση του παραπάνω αριθμού μπορεί να εκφραστεί ως:

$$12 \times 16^2 + 0 \times 16^1 + 3 \times 16^0$$

### 1.2.6 Μετατροπή βάσης αριθμού

Για να μετατρέψουμε έναν αριθμό σε ένα σύστημα στον ισοδύναμο αριθμό ενός άλλου συστήματος και δεδομένου ότι το δεκαδικό σύστημα είναι πιο οικείο από τα άλλα συστήματα, αρχικά θα δούμε πώς γίνεται η μετατροπή από το δεκαδικό σύστημα σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα. Κατόπιν θα δούμε πώς γίνεται η μετατροπή από οποιοδήποτε σύστημα στο δεκαδικό. Τέλος, θα δούμε πώς μπορούμε εύκολα να μετατρέψουμε από δυαδικό σε δεκαεξαδικό ή οκταδικό και αντίστροφα.

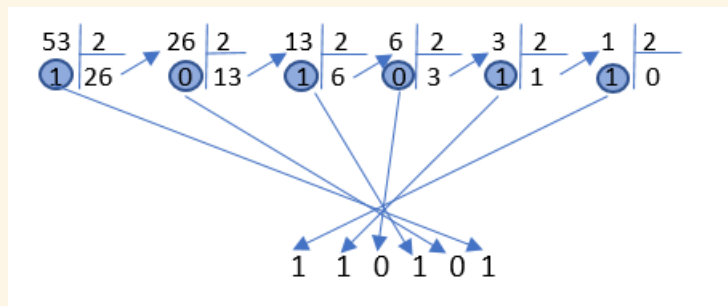
Για να μετατρέψουμε έναν αριθμό από δεκαδικό σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα, ακολουθούμε την διαδικασία των διαδοχικών διαιρέσεων:

1. Το ακέραιο μέρος ενός αριθμού το διαιρούμε με τον αριθμό του συστήματος που θέλουμε να τον μετατρέψουμε. Για παράδειγμα θέλουμε να μετατρέψουμε έναν αριθμό από το δεκαδικό σε δυαδικό, τότε θα διαιρέσουμε τον αριθμό αυτόν με το δύο.

2. Καθώς διαιρούμε τον αριθμό με τον αριθμό του συστήματος που θέλουμε να τον μετατρέψουμε κάθε φορά, το υπόλοιπο της κάθε διαίρεσης θα είναι το δεξιότερο ψηφίο του αριθμού και το νέο πηλίκο που παίρνουμε κάθε φορά θα το διαιρούμε με τον αριθμό του συστήματος και θα παίρνουμε καινούργιο υπόλοιπο ώσπου να μηδενιστεί το πηλίκο.

#### Μετατροπή από το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης στο δυαδικό

Έστω ότι θέλουμε να μετατρέψουμε τον αριθμό  $(53)_{10}$  σε δυαδικό. Το ακέραιο μέρος του αριθμού το διαιρούμε με τον αριθμό του συστήματος που θέλουμε να τον μετατρέψουμε, δηλαδή το 2 :



| A  |                         | Π                          | Υ | X      |
|----|-------------------------|----------------------------|---|--------|
| 53 | Διαιρούμε το 53 με το 2 | 26                         | 1 | 1      |
| 26 | Διαιρούμε το 26 με το 2 | 13                         | 0 | 01     |
| 13 | Διαιρούμε το 13 με το 2 | 6                          | 1 | 101    |
| 6  | Διαιρούμε το 6 με το 2  | 3                          | 0 | 0101   |
| 3  | Διαιρούμε το 3 με το 2  | 1                          | 1 | 10101  |
| 1  | Διαιρούμε το 1 με το 2  | 0                          | 1 | 110101 |
| 0  |                         | $53_{(10)} = 110101_{(2)}$ |   |        |

α. Διαιρούμε τον αρχικό αριθμό με το 2

β. Σημειώνουμε το υπόλοιπο και διαιρούμε το πηλίκο πάλι με το 2.



γ. Επαναλαμβάνουμε το βήμα (β) για όσο το ακέραιο πηλίκο είναι μεγαλύτερο από το 0 (ή μέχρι το ακέραιο πηλίκο να γίνει 0)

δ. Ο δυαδικός αριθμός αποτελείται από τα υπόλοιπα των διαιρέσεων ξεκινώντας από το τελευταίο και καταλήγοντας στο πρώτο.

### Μετατροπή από το δεκαδικό σύστημα στο οκταδικό

Έστω ότι θέλουμε να μετατρέψουμε τον δεκαδικό αριθμό  $(45)_{10}$  σε οκταδικό. Το ακέραιο μέρος του αριθμού το διαιρούμε με τον αριθμό του συστήματος που θέλουμε να τον μετατρέψουμε, δηλαδή το 8:

| A  |                              | Π | Υ | Χ |
|----|------------------------------|---|---|---|
| 45 | — Διαιρούμε το 45 με το 8 —→ | 5 | 5 | 5 |
| 5  | — Διαιρούμε το 5 με το 8 —→  | 0 | 5 | 5 |

$(45)_{10} \rightarrow (55)_8$

### Μετατροπή από το δεκαδικό σύστημα στο δεκαεξαδικό

Έστω ότι θέλουμε να μετατρέψουμε τον αριθμό  $(45)_{10}$  σε δεκαεξαδικό. Το ακέραιο μέρος του αριθμού το διαιρούμε με τον αριθμό του συστήματος που θέλουμε να τον μετατρέψουμε, δηλαδή το 16:

| A  |                               | Π | Υ  | Χ |
|----|-------------------------------|---|----|---|
| 45 | — Διαιρούμε το 45 με το 16 —→ | 2 | 13 | D |
| 2  | — Διαιρούμε το 2 με το 16 —→  | 0 | 2  | 2 |

$(45)_{10} \rightarrow (2D)_{16}$

Σημαντική παρατήρηση: Επειδή  $2^3=8$  και  $2^4=16$ , για την αναπαράσταση ενός οκταδικού αριθμού χρειάζονται το πολύ τρία δυαδικά ψηφία (8 δυνατοί συνδυασμοί των 3 ψηφίων), ενώ για την αναπαράσταση ενός δεκαεξαδικού αριθμού χρειάζονται το πολύ τέσσερα δυαδικά ψηφία (16 δυνατοί συνδυασμοί των 4 ψηφίων).

### Μετατροπή από άλλα συστήματα αρίθμησης στο δεκαδικό

Για να μετατρέψουμε έναν αριθμό από το σύστημα αρίθμησης που βρισκόμαστε στο δεκαδικό, πολλαπλασιάζουμε το κάθε ψηφίο του με τον αριθμό που είναι η βάση του συστήματος αρίθμησης στο οποίο αναπαρίσταται ο αριθμός, π.χ. στο δυαδικό το δύο, στο οκταδικό το 8 κ.τ.λ. και εκθέτη τον αριθμό της θέσης που βρίσκεται το κάθε ψηφίο. Στο τέλος προσθέτουμε όλα τα γινόμενα και το αποτέλεσμα αυτό θα είναι ο αριθμός που ζητάμε στο δεκαδικό σύστημα.

Για να μετατρέψουμε τους παρακάτω δυαδικούς αριθμούς σε δεκαδικούς:

| Δυαδικός   | 1     | 0     | 1     |
|------------|-------|-------|-------|
| Εκθέτης    | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ |
| Αποτέλεσμα | 4     | 0     | 1     |

Δεκαδικός αριθμός:  $4 + 0 + 1 = 5$

$$(101101)_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 = (45)_{10}$$

Για να μετατρέψουμε τους παρακάτω δεκαεξαδικούς αριθμούς σε δεκαδικούς:

$$(78D)_{16} = 7 \times 16^2 + 8 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = 1792 + 128 + 13 = (1933)_{10}$$

|                     |          |          |          |
|---------------------|----------|----------|----------|
| <b>Δεκαεξαδικός</b> | <b>1</b> | <b>A</b> | <b>1</b> |
| Εκθέτης             | $16^2$   | $16^1$   | $16^0$   |
| Αποτέλεσμα          | 256      | 160      | 1        |

Δεκαδικός αριθμός:  $256 + 160 + 1 = 417$

Για να μετατρέψουμε τους παρακάτω οκταδικούς αριθμούς σε δεκαδικούς:

$$(457)_8 = 4 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = 256 + 40 + 7 = (303)_{10}$$

|                  |          |          |          |          |
|------------------|----------|----------|----------|----------|
| <b>Οκταδικός</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>7</b> | <b>1</b> |
| Εκθέτης          | $8^3$    | $8^2$    | $8^1$    | $8^0$    |
| Αποτέλεσμα       | 1024     | 192      | 56       | 1        |

Δεκαδικός αριθμός:  $1024 + 192 + 56 + 1 = 1273$

Πίνακας αντιστοιχίας αριθμητικών συστημάτων

|                |   |   |    |    |     |     |     |     |      |      |      |      |      |      |      |      |       |
|----------------|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| <b>10-δικό</b> | 0 | 1 | 2  | 3  | 4   | 5   | 6   | 7   | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16    |
| <b>2-δικό</b>  | 0 | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | 110 | 111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 10000 |
| <b>8-δικό</b>  | 0 | 1 | 2  | 3  | 4   | 5   | 6   | 7   | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 20    |
| <b>16-δικό</b> | 0 | 1 | 2  | 3  | 4   | 5   | 6   | 7   | 8    | 9    | A    | B    | C    | D    | E    | F    | 10    |

### Μετατροπή από το δυαδικό σύστημα στο δεκαεξαδικό/οκταδικό και αντίστροφα

Μπορούμε να μετατρέψουμε εύκολα ένα δυαδικό αριθμό στο οκταδικό σύστημα και αντίστροφα. Αυτό γίνεται αν χωρίσουμε τα ψηφία του δυαδικού αριθμού σε τριάδες ξεκινώντας από τα δεξιά του αριθμού. Κάθε μια τριάδα αντιστοιχεί σ' ένα μονοψήφιο οκταδικό αριθμό, και την αντικαθιστούμε με τον αριθμό αυτό.

Το ίδιο ισχύει και για τη μετατροπή δυαδικού αριθμού σε δεκαεξαδικό και αντίστροφα. Χωρίζουμε τα ψηφία του δυαδικού αριθμού σε τετράδες ξεκινώντας από τα δεξιά του αριθμού. Κάθε μια τετράδα αντιστοιχεί σ' ένα μονοψήφιο δεκαεξαδικό αριθμό, και την αντικαθιστούμε με τον αριθμό αυτό.

Έστω ότι θέλουμε να μετατρέψουμε τον αριθμό  $(101100110101)_2$  σε οκταδικό:

|                                                  |                                                  |                                                  |                                                  |                  |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|------------------|
| 101                                              | 100                                              | 110                                              | 101                                              | Δυαδικός         |
| $1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 5$ | $1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 4$ | $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 6$ | $1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 5$ |                  |
| <b>5</b>                                         | <b>4</b>                                         | <b>6</b>                                         | <b>5</b>                                         | <b>Οκταδικός</b> |

Έστω ότι θέλουμε να μετατρέψουμε τον αριθμό  $(101100110101)_2$  σε δεκαεξαδικό:

|                                                                  |                                                                 |                                                                 |                     |
|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------|
| 1011                                                             | 0011                                                            | 0101                                                            | Δυαδικός            |
| $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11$ | $0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 3$ | $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 5$ |                     |
| <b>B</b>                                                         | <b>3</b>                                                        | <b>5</b>                                                        | <b>Δεκαεξαδικός</b> |

Η μετατροπή ενός δεκαεξαδικού αριθμού σε δυαδικό γίνεται αντικαθιστώντας κάθε ψηφίο του αριθμού με το αντίστοιχο τετραψήφιο δυαδικό αριθμό.



Έστω ότι θέλουμε να μετατρέψουμε τον αριθμό  $(4FD)_{16}$  σε δυαδικό:

| 4                                                               | F                                                                | D                                                                | Δεκαεξαδικός    |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|-----------------|
| $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 4$ | $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 15$ | $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 13$ |                 |
| <b>0100</b>                                                     | <b>1111</b>                                                      | <b>1101</b>                                                      | <b>Δυαδικός</b> |

Η μετατροπή ενός οκταδικού αριθμού προς το δυαδικό γίνεται με τον ίδιο τρόπο, αλλά αντικαθιστούμε κάθε ψηφίο του αριθμού με το αντίστοιχο τριψήφιο δυαδικό αριθμό.

Έστω ότι θέλουμε να μετατρέψουμε τον αριθμό  $(24)_8$  σε δυαδικό:

| 2                                                | 4                                                | Οκταδικός       |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------|
| $0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 2$ | $1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 4$ |                 |
| <b>010</b>                                       | <b>100</b>                                       | <b>Δυαδικός</b> |

### Μετατροπή από το δεκαεξαδικό σύστημα στο οκταδικό και αντίστροφα

Η μετατροπή δεκαεξαδικού αριθμού σε οκταδικό ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

1. Μετατρέπουμε τον δεκαεξαδικό αριθμό σε δυαδικό αντικαθιστώντας κάθε ψηφίο του αριθμού με το αντίστοιχο τετραψήφιο δυαδικό αριθμό
2. Χωρίζουμε τον δυαδικό σε τριάδες ξεκινώντας από τα δεξιά του αριθμού
3. Μετατρέπουμε κάθε τριάδα στον αντίστοιχο οκταδικό αριθμό.

Έστω ότι θέλουμε να μετατρέψουμε τον αριθμό  $(4FD)_{16}$  σε οκταδικό:

| 4                                                           | F                                                           | D                                                           | Δεκαεξαδικός    |
|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------|
| $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ | $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ | $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ |                 |
| <b>0100</b>                                                 | <b>1111</b>                                                 | <b>1101</b>                                                 | <b>Δυαδικός</b> |

Τον αριθμό  $(010011111101)_2$  που βρήκαμε τον χωρίζουμε σε τριάδες:

|          |          |          |          |                  |
|----------|----------|----------|----------|------------------|
| 010      | 011      | 111      | 101      | Δυαδικός         |
| <b>2</b> | <b>3</b> | <b>7</b> | <b>5</b> | <b>Οκταδικός</b> |

Η μετατροπή οκταδικού αριθμού σε δεκαεξαδικό γίνεται με τον ίδιο τρόπο. Μετατρέπουμε τον οκταδικό αριθμό σε δυαδικό. Έπειτα, χωρίζουμε τον δυαδικό αριθμό που θα βρούμε σε τετράδες για να βρούμε το δεκαεξαδικό ισοδύναμο.

Έστω ότι θέλουμε να μετατρέψουμε τον αριθμό  $(4116)_8$  σε δεκαεξαδικό:

| 4                                            | 1                                            | 1                                            | 6                                            | Οκταδικός       |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------------|
| $1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ | $0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ | $0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ | $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ |                 |
| <b>100</b>                                   | <b>001</b>                                   | <b>001</b>                                   | <b>110</b>                                   | <b>Δυαδικός</b> |

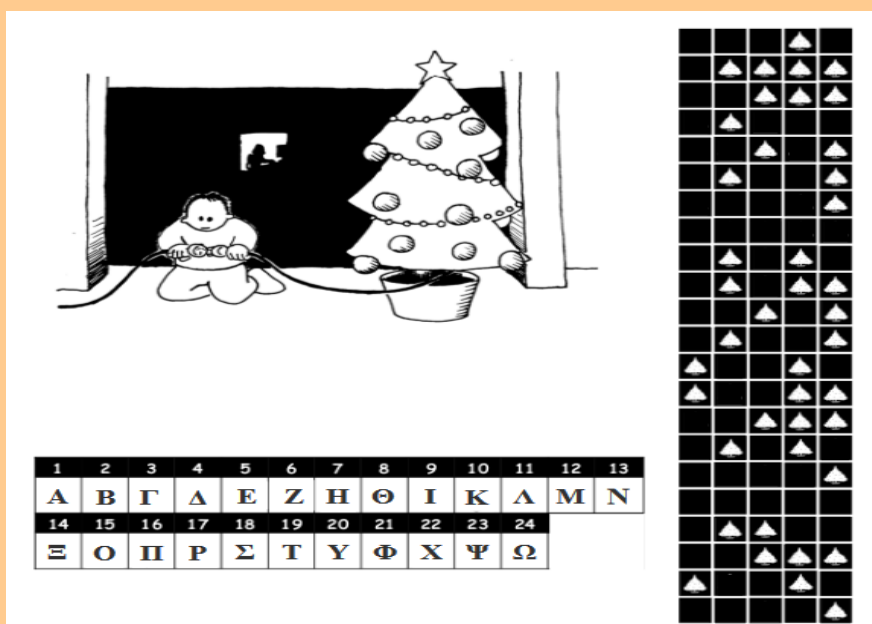
Τον αριθμό  $(100001001110)_2$  που βρήκαμε τον χωρίζουμε σε τετράδες:

|          |          |          |                     |
|----------|----------|----------|---------------------|
| 1000     | 0100     | 1110     | Δυαδικός            |
| <b>8</b> | <b>4</b> | <b>E</b> | <b>Δεκαεξαδικός</b> |



### Δραστηριότητες - Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιώντας τον αλληλεπιδραστικό μετατροπέα (Base 2 converter, <https://www.csfieldguide.org.nz/en/interactives/base-calculator/>), προσπάθησε να μετατρέψεις έναν δεκαδικό αριθμό σε δυαδικό.
2. Χρησιμοποιώντας το μαθησιακό αντικείμενο Φωτόδεντρο: Μετατροπή από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα (<https://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/742>), θα εισάγεις έναν οποιονδήποτε δεκαδικό αριθμό [από 0 έως 255] και θα παρακολουθήσεις την προσομοίωση της διαδικασίας μετατροπής του σε δυαδικό. Προσπάθησε να περιγράψεις τις μεθόδους που χρησιμοποιεί η εφαρμογή.
3. Χρησιμοποιώντας το binary game της CISCO (<https://learningcontent.cisco.com/games/binary/index.html>) μπορείτε να αυξήσετε την κατανόησή σας για τους δυαδικούς αριθμούς και την ταχύτητα μετατροπής. Σε λίγο θα κάνετε αυτές τις μετατροπές στο μυαλό σας. Το ερώτημα λοιπόν είναι πόσα επίπεδα μπορείτε να κατακτήσετε;
4. Αυτόματες μετατροπές σε αριθμητικά συστήματα: <https://www.convertworld.com/el/arithmoi/>
5. Μετατρέψτε τον δεκαδικό  $(9518)_{10} = (?)_8 = (?)_2 = (?)_{16}$
6. Μετατρέψτε το δυαδικό αριθμό 011110010 στον αντίστοιχο οκταδικό, χωρίς ενδιάμεση μετατροπή στο δεκαδικό σύστημα.
7. Ο Δημήτρης έχει παγιδευτεί στον τελευταίο όροφο ενός πολυκαταστήματος. Είναι παραμονές Χριστουγέννων και ήθελε να γυρίσει σπίτι του με μερικά δώρα, αλλά δεν αντιλήφθηκε τι ώρα έκλειναν και έμεινε κλεισμένος μέσα. Δοκίμασε να φωνάξει, να ουρλιάξει, αλλά δεν υπήρχε κανείς. Τώρα πια νύχτωσε και ο Δημήτρης βλέπε στην απέναντι οικοδομή μία κοπέλα ειδικευμένη στην Πληροφορική που εργάζεται μέχρι αργά τη νύχτα. Πώς μπορεί να προσελκύσει την προσοχή της; Ο Δημήτρης ρίχνει μια ματιά τριγύρω του για να δει τι μπορεί να χρησιμοποιήσει. Του έρχεται μία ιδιοφυής ιδέα! Μπορεί να χρησιμοποιήσει τα φωτάκια για το χριστουγεννιάτικο δένδρο, για να της στείλει ένα μήνυμα! Ο Δημήτρης συνδέει τα φώτα έτσι που να μπορεί να τα ανάψει ή να τα σβήσει όλα μαζί. Εκμεταλλεύεται έναν απλό δυαδικό κώδικα, που είναι βέβαιο ότι η κοπέλα στην απέναντι πλευρά του δρόμου μπορεί να καταλάβει. Μπορείτε να τον αντιληφθείτε;



8. Μετατρέψτε τον δεκαδικό αριθμό 137 σε δυαδικό

Βήμα 1: ...../2 = ..... Υπόλοιπο ...

Βήμα 2: ...../2 = ..... Υπόλοιπο ...

Βήμα 3: ...../2 = ..... Υπόλοιπο ...

Βήμα 4: ...../2 = ..... Υπόλοιπο ...

Βήμα 5: ...../2 = ..... Υπόλοιπο ...

Βήμα 6: ...../2 = ..... Υπόλοιπο ...

Βήμα 7: ...../2 = ..... Υπόλοιπο ...

Βήμα 8: ...../2 = ..... Υπόλοιπο ...



## Δραστηριότητες αυτοαξιολόγησης

### Δ.Α. 1.2.1: Ερωτήσεις:

- Α. Ποια η διαφορά μεταξύ των θεσιακών και μη θεσιακών αριθμητικών συστημάτων  
 Β. Ποια η σχέση μεταξύ της βάσης και του πλήθους των ψηφίων σ ένα θεσιακό αριθμητικό σύστημα  
 Γ. Γιατί είναι εύκολη η μετατροπή ενός αριθμού από το δυαδικό σύστημα αρίθμησης στο οκταδικό ή το δεκαεξαδικό και αντίστροφα.  
 Δ. Πόσα bit του δυαδικού συστήματος αντιστοιχούν σ ένα ψηφίο του δεκαεξαδικού συστήματος;

### Δ.Α. 1.2.2: Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

| Αριθμός<br>δυαδικού<br>συστήματος | Βαρύτητες θέσεων |   |   |   |   | Αντίστοιχος<br>δεκαδικός αριθμός |
|-----------------------------------|------------------|---|---|---|---|----------------------------------|
|                                   | 16               | 8 | 4 | 2 | 1 |                                  |
| 10110                             | 1                | 0 | 1 | 1 | 0 | $16+4+2=22$                      |
| 01110                             |                  |   |   |   |   |                                  |
| 00101                             |                  |   |   |   |   |                                  |
| 01010                             |                  |   |   |   |   |                                  |
|                                   |                  |   |   |   |   | 7                                |
|                                   |                  |   |   |   |   | 15                               |
|                                   |                  |   |   |   |   | 31                               |

### Δ.Α. 1.2.3: Να μετατρέψετε στο δυαδικό σύστημα τους οκταδικούς αριθμούς:

75

543

1176



Γράφουμε κάθε ψηφίο με 3 bits.

### Δ.Α. 1.2.4: Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

| Δυαδικός αριθμός | Δεκαδικός αριθμός | Δεκαεξαδικός αριθμός |
|------------------|-------------------|----------------------|
| 01011101         |                   |                      |
|                  | 56                |                      |
|                  |                   | AC1                  |